

ҚАТТЫ ДЕНЕНІҢ ҚОЗҒАЛЫС ЗАҢДАРЫ

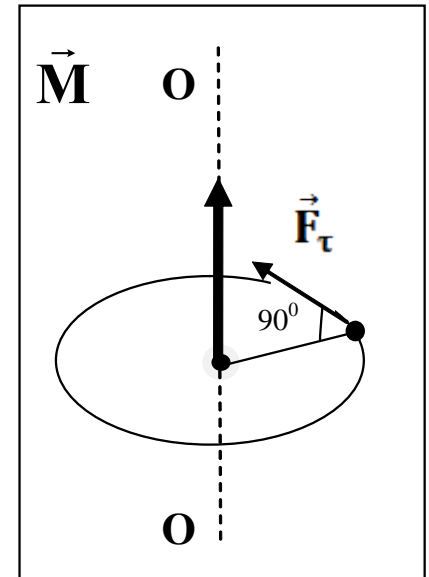
Күш моменті (айналу моменті). Импульс моменті. Материалдық нүкте мен қатты дененің оське қатысты инерция моменті. Нүкте мен қатты дененің оське қатысты айналмалы қозғалыс динамикасының теңдеулері. Момент теңдеуі. Қатты дененің қозғалыс және тепе-теңдік теңдеулері.

Қатты дененің айналмалы қозғалысы кезінде оның барлық нүктелері центрлері айналу осі деп аталатын бір түзу сызықта орналасқан шеңберлер бойымен қозғалады (ОО).

Дененің айналу күйін тек айналу центрін күш түсірілген нүктемен байланыстыратын радиус-векторға перпендикуляр \vec{F}_τ сыртқы күштің тангенциалды компоненті ғана өзгерте алады.

Осылайша, айналмалы қозғалыс күйінің өзгеруінің себебі \vec{M}

күш моментінің әсері болып табылады.



Айналу О центріне қатысты күш моменті -

– сыртқы күштің тангенциалдық құраушы модулін бойынша айналу центрін күш әсер еткен нүктесімен байланыстыратын радиус-вектор модуліне көбейтіндісіне тең вектор:

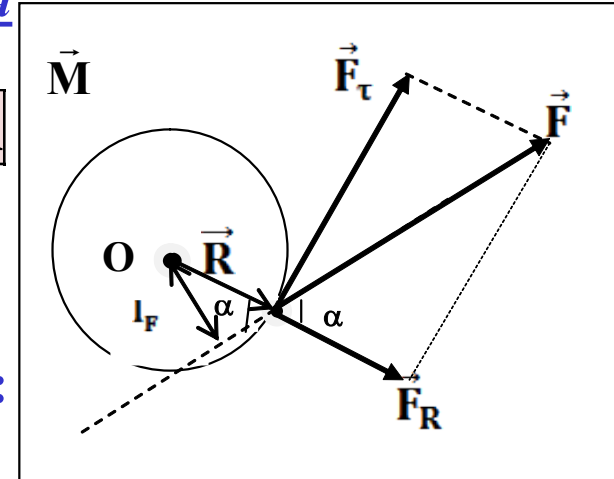
$$\vec{M} = \vec{F}_\tau \cdot \vec{R}$$

Күш моментінің векторының бағыты

«оң бұранда ережесімен» анықталады.

Псевдовектор бұл шарттарды қанағаттандырады:

$$\vec{M} = [\vec{R} \cdot \vec{F}]$$

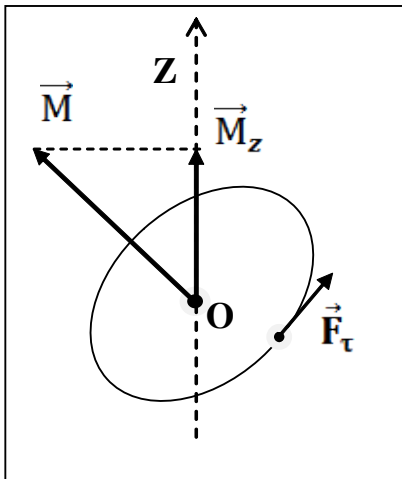


Практикалық мақсаттар үшін күш моментінің модулін F күш модулінің оның иініне l_F көбейтіндісі ретінде өрнектеу ыңғайлы:

$$M = F \cdot l_F = F \cdot R \cdot \sin \alpha$$

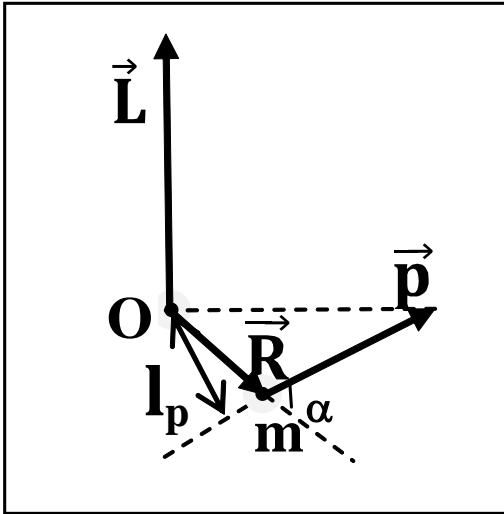
О нүктесі арқылы өтетін Z осіне \vec{M} векторының проекциясы осы оське қатысты күш моменті M_Z деп аталады :

$$M_Z = [\vec{R} \cdot \vec{F}]_Z$$



О нүктесіне қатысты материалдық нүктенің (бөлшектің) айналу қозғалысының мөлшері импульс моменті

болып табылады:



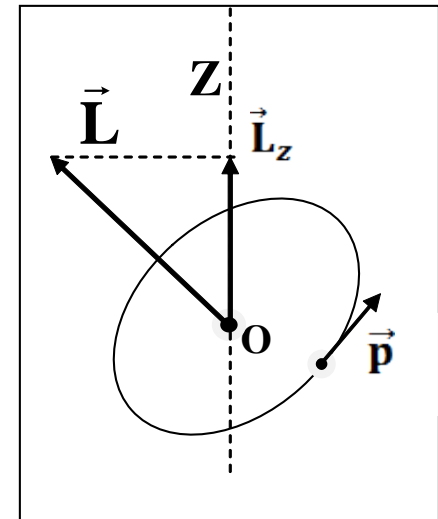
$$\vec{L} = [\vec{R} \cdot \vec{p}] = [\vec{R} \cdot m\vec{v}]$$

Импульс моментінің модулі импульс модулінің p оның l_p ініне көбейтіндісі келесі түрде болады:

$$L = p \cdot l_p = p \cdot R \cdot \sin\alpha$$

О нүктесі арқылы өтетін **Z** осіне \vec{L} векторының проекциясы осы оське қатысты L_z импульс моменті деп аталады:

$$L_z = [\vec{R} \cdot \vec{p}]_z$$



Бөлшектің импульс моментінің өзгерісі:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \frac{d}{dt} [\vec{R} \cdot m\vec{v}] = [\vec{R} \cdot m\dot{\vec{v}}] + [\dot{\vec{R}} \cdot m\vec{v}] = [\vec{R} \cdot \vec{F}] + [\vec{v} \cdot m\vec{v}] = \vec{M}$$

Материалдық нүктелер жүйесі үшін және қатты дене үшін де осындай теңдеулер жазуға болады.

*Импульс моментінің өзгеру заңы **материалдық нүкте мен қатты дененің айналу қозғалысы динамикасының негізгі заңы** болып табылады:*

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{M}$$

Бөлшектің немесе қатты дененің оське қатысты импульс моментінің уақыт бойынша туындысы сол оське қатысты бөлшекке немесе қатты денеге әсер ететін күш моментіне тең:

$$\frac{d}{dt} L_z = M_z$$

Белгілі бір Z осіне қатысты материалдық нүктенің немесе қатты дененің L_Z импульс моменті ω_Z бұрыштық жылдамдыққа пропорционал екенін көрсетуге болады:

$$L_Z = I \cdot \omega_Z .$$

I пропорционалдылық коэффициенті инерция моменті деп аталады.

Айналу осінен r қашықтықта жатқан m массасы бар

материалдық нүктенің инерция моменті:

$$I = m r^2$$

Материалдық нүктелер жүйесінің инерция моменті:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Оське қатысты **қатты дененің инерция моменті:**

$$I = \int_m r^2 dm = \int_v r^2 \rho \cdot dV$$

мұндағы dm – айналу осінен r қашықтықта орналасқан масса элементі,

ρ - заттың тығыздығы, V – дененің көлемі.

Қатты дененің инерция моменті материалға, оның пішіні мен өлшеміне және оның айналу осіне қатысты орналасуына тәуелді.

Симметрия осіне сәйкес келетін айналу осіне қатысты дұрыс геометриялық пішінді денелердің инерция моменттерін есептеуге болады:

табанының радиусы R болатын біртекті цилиндр (диск)

$$I_{ц} = \frac{1}{2} mR^2 ,$$

табанының радиусы R болатын қуыс жұқа цилиндр (сақина)

$$I_{ц.ц} = mR^2 ,$$

радиусы R болатын біртекті шар

$$I_{ш} = \frac{2}{5} mR^2$$

Сол білікке перпендикуляр, массалар центрі арқылы өтетін оське қатысты ℓ ұзындығы бар жұқа біліктің инерция моменті:

$$I_0 = \frac{1}{12} m\ell^2$$

Массалар центрі арқылы өтпейтін **Z** осіне қатысты қатты денелердің инерция моменттерін

есептеу **Штейнер теоремасына** сәйкес жүзеге асырылады:

$$\mathbf{I}_Z = \mathbf{I}_0 + \mathbf{m}d^2 ,$$

мұндағы \mathbf{I}_0 - **Z** осіне параллель және массалар центрі арқылы өтетін оське қатысты дененің инерция моменті,
d - осьтер арасындағы қашықтық.

Штейнер теоремасын қолдана отырып,
білікке перпендикуляр және оның бір ұшынан өтетін **Z** осіне қатысты ℓ ұзындығы бар біліктің инерция моментін есептеуге болады :

$$\mathbf{I}_0 = \frac{1}{12} m\ell^2$$

$$\mathbf{I}_Z = \mathbf{I}_0 + m(\ell/2)^2 = \frac{1}{3} m\ell^2$$

$L_Z = I \cdot \omega_Z$ болғандықтан, уақыт өте келе импульс моментінің

өзгеру жылдамдығы: $\frac{dL_Z}{dt} = \frac{d}{dt} (I \omega_Z) = I \frac{d\omega_Z}{dt} = I \varepsilon_Z$.

Осылайша, **қатты дененің Z осіне қатысты айналмалы қозғалыс динамикасының заңы** келесі түрде болады:

$$M_Z = I \varepsilon_Z$$

Егер қатты дененің айналу осі инерцияның бас осіне сәйкес келсе ¹⁾, онда **айналмалы қозғалыс динамикасының негізгі заңы** келесідей болады:

$$\vec{M} = I \vec{\varepsilon}$$

мұндағы I – дененің сол оське қатысты инерция моменті.

¹⁾ Инерцияның бас осьтері деп дененің массалар центрі (инерция центрі) арқылы өтетін үш өзара перпендикуляр осьтері аталады.

Қатты денелердің ілгерілемелі және айналмалы қозғалыстарын сипаттау кезінде ұқсас сипаттамалар қолданылады:

Импульс - ілгерілемелі қозғалыс мөлшерінің өлшемі ($\mathbf{p}=\mathbf{mv}$).

Импульс моменті - айналмалы қозғалыс мөлшерінің өлшемі ($\mathbf{L}=\mathbf{I}\omega$).

Масса - қозғалатын қатты денелердің инерттілік өлшемі ($\mathbf{m}=\mathbf{F}/\mathbf{a}$).

Инерция моменті - айналмалы денелердің инерттілік өлшемі ($\mathbf{I}=\mathbf{M}/\epsilon$).

Демек қатты денелердің ілгерілемелі және айналмалы қозғалысының негізгі теңдеулерін жазудағы ұқсастық:

$$\vec{\mathbf{F}} = m \vec{\mathbf{a}} \quad \longleftrightarrow \quad \vec{\mathbf{M}} = I \vec{\epsilon}$$

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad \vec{\mathbf{M}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$$

Осылайша, қатты дененің қозғалысы
екі теңдеумен сипатталады::

1) $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ - массалар центрінің қозғалыс теңдеуі,

\vec{F} - барлық сыртқы күштердің қорытқы күші;

2) $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ - айналмалы қозғалысының теңдеуі,

\vec{M} - барлық сыртқы күштердің қорытқы күш моменті.

Ал қатты дененің тепе-теңдігінің шарты бір уақытта
екі теңдіктің орындалуы болып табылады:

$$\vec{F} = 0$$

$$\vec{M} = 0$$

Бұрыштық импульстің сақталу заңы және оның кеңістік изотропиясымен байланысы.

Бекітілген нүктеге қатысты тұйық жүйенің импульс моменті уақыт өте келе өзгермейді:

$$\vec{M} \equiv 0$$

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = 0$$

$$\vec{L} = \text{const}$$

Тұйық жүйенің қозғалмайтын оське қатысты импульс моменті уақыт өте келе өзгермейді:

$$M_z \equiv 0$$

$$\frac{d}{dt} L_z = 0$$

$$L_z = \text{const}$$

Импульстің моментін сақтау заңы-оның изотроптық кеңістігінің симметриясының салдары болып табылатын табиғаттың негізгі заңы.

Тұйық жүйенің физикалық қасиеттері мен қозғалыс заңдары оны кеңістікте кез келген бұрышқа бүтін етіп бұрған кезде өзгермейді.